# Erfahrungsmässige Begründung des Satzes von der Aequivalenz zwischen Wärme und mechanischer Arbeit.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde in Göttingen, 1861.

### Vorbemerkung.

Unter den in der neueren Zeit ausgebildeten physikalischen Lehren findet sich seit ungefähr zwei Jahrzehnten eine auf die Wärmeerscheinungen gerichtete, welche unter dem Namen der mechanischen Wärmetheorie bekannt ist. - Ihren Gegenstand bilden ausschliesslich die Wirkungen der Wärme auf die ponderablen Körper, d. h. die Veränderungen, welche diese durch die Wärme Ihr Ausgangspunkt ist, unmittelbar, der Satz der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit; in letzter Instanz basirt sie auf bestimmten Vorstellungen über das Wesen der Wärme, auf der Hypothese nämlich, dass deren physischer Grund in gewissen Bewegungszuständen materieller Theile beruhe. Sie steht also, was ihre Grundlage betrifft, auf gemeinschaftlichem Boden mit der Undulationstheorie; hinsichtlich ihres Gegenstandes und ihrer Aufgaben aber ergänzt sie letztere, indem sie die Wirkungen der Wärme in den Körpern aus den nämlichen Voraussetzungen zu erklären unternimmt, aus welchen die Undulationstheorie die an die Vorgänge der Wärmeverbreitung sich knüpfenden Erscheinungen ableitet.

Die Art und Weise, wie physikalische Theorien gebildet worden sind, zeigt einen mannigfach verschiedenen Charakter. Der einen geht eine umfassende Untersuchung der Erscheinungen auf dem Wege der Beoachtung und [4] Messung voraus, die, systematisch verfolgt, erst zu beschränkteren, dann zu allgemeineren Gesetzen führt und in ihnen sichere Stützpunkte darbietet, nach und nach immer bestimmtere Vorstellungen über den Zusammenhang der Erscheinungen zu begründen. Ein letzter abschliessender Schritt auf dieser Bahn lässt dann endlich eine vollendete Theorie hervortreten, die nun in dem Prozesse ihrer allmähligen Entstehung auch schon die Gründe ihrer Rechtfertigung vorfindet. In andern Fällen - und es ist die bei weitem grössere Zahl - verfolgt die Forschung den entgegengesetzten Weg. Der Erfahrung an einem schwachen Leitfaden vorauseilend, versetzt sie sich durch eine Hypothese gleich mitten in den unbekannten Zusammenhang der Erscheinungen und deducirt aus ihm die Gesetze, welche, wenn er wirklich besteht, Folgen desselben sein müssen, um solche hernach mit den Ergebnissen der Beobachtung zu vergleichen und in der Uebereinstimmung zwischen beiden die Bestätigung der Hypothese zu finden. Die eigentliche Begründung der Theorie ist alsdann eine durchaus regressive; sie geschieht im Herabsteigen von ihrem vorweggenommenen Principe zu den speciellen Folgerungen, die einer experimentellen Controlle fähig sind.

Bei der mechanischen Wärmetheorie liegt dieser letztere Fall vor. Der Satz der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit, von welchem sie ausgeht, ist notorisch nur aus wenigen vereinzelten Wahrnehmungen anticipirt, — wie z. B. aus der Rolle, welche die Wärme in den Dampfmaschinen spielt u. drgl., — ohne dass von diesen, in Ermangelung aller quantitativen Bestimmungen, irgend ein directer Beweis für seine Richtigkeit hergenommen werden konnte. Ihre Rechtfertigung beruht daher allein in der Entwickelung ihrer Consequenzen, mit dem nachträglichen Beweise der Uebereinstimmung dieser mit der Erfahrung, und ihre ganze Ausbildung ist denn auch vorzugsweise darauf gerichtet gewesen, aus dem Satze der Aequivalenz solche Folgerungen über das Verhalten der [5] Körper zu ziehen, die einer Prüfung durch Beobachtung und Messung zugänglich sind.

In Rücksicht auf dieses Ziel hat nun ein kleiner Kreis von sonst wenig beachteten Erscheinungen eine besondere Bedeutsamkeit gewonnen — das sind die Wärmewirkungen, welche bei den

Gasen durch Condensation oder Dilatation hervorgebracht werden. Abgesehen davon, dass die hier auftretenden Vorgänge ihrer Natur nach sich am unmittelbarsten unter den Gesichtspunkt der mechanischen Wärmetheorie stellen (indem mechanische Wirkungen direct mit Wärmeeffecten verbunden erscheinen), haben dieselben den Vorzug, dass die maassgebenden physischen Verhältnisse bei ihnen nicht nur genau erforscht, sondern überdies von sehr einfacher Art sind. Das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, welche den von den gasförmigen Stoffen annähernd erreichten Grenzzustand der Körper charakterisiren, in Verbindung mit den Bestimmungen über die Wärmecapacität, machen den Inbegriff dieser Verhältnisse aus; die genannte Erscheinungsreihe bietet somit die Garantie, dass die Wirklichkeit auch den Bedingungen entspricht, auf welchen die theoretische Vorausbestimmung fusst, also die Forderungen erfüllt sind, an welche überhaupt die Möglichkeit einer Vergleichung von Theorie und Erfahrung geknüpft ist. --- Diese Erscheinungen haben daher in der That die erste entscheidende Prüfung, resp. Bestätigung der Theorie herbeigeführt.

Wenn man nun näher nachsieht, wie in diesem Falle die Ergebnisse der Beobachtung zur Controlle der Theorie verwandt worden sind, so tritt ein beachtenswerther Umstand hervor. -- Im allgemeinen sind zwei Arten einer solchen Controlle denkbar. Einmal können die Ergebnisse einzelner Messungen unmittelbar mit den Resultaten der Theorie verglichen werden; es kann aber auch die experimentelle Untersuchung der Erscheinungen selbständig zu mehr oder minder umfassenden Gesetzen geführt haben. und dann sind es diese Gesetze, d. h. die Formen der hierdurch festgestellten quantitativen Abhängigkeit von [6] Bedingung und Erfolg, welche das Ziel der Vergleichung werden. - Das zweite ist hier der Fall. Soweit die genannten Vorgänge bei den Gasen in Betracht kommen, sind es nicht einzelne Messungsresultate, von welchen die mechanische Wärmetheorie den Beweis für die Richtigkeit ihrer Voraussetzungen hernimmt; es sind vielmehr (vorzugsweise wenigstens) gewisse allgemeine Relationen, auf deren Zusammentreffen mit den aus ihr abgeleiteten sie sich beruft, Relationen, die schon lange, bevor man an eine theoretische Begründung dachte, auf rein experimentellem Wege festgestellt waren (die Constanz des Verhältnisses der beiden Wärmecapacitäten der Luft, das Gesetz, dass gleiche Volumina der verschiedenen Gase, um gleiche Bruchtheile comprimirt, dieselbe Wärmemenge entwickeln, u. a.).

Diese Betrachtung legt die Frage nahe, ob solche allgemeine Relationen, welche dadurch, dass sie sich ihrer Form nach als Consequenzen aus dem Principe der Theorie herausstellen, dessen Gültigkeit beweisen, nicht auch umgekehrt ausreichen, dieses Princip, von den Erscheinungen ausgehend, durch ihre Vermittelung wirklich abzuleiten; mit andern Worten, ob sie nicht anch eine genügende Grundlage zu einer progressiven Begründung der mechanischen Wärmetheorie, wenigstens für den Bereich der permanenten Gase, darbieten möchten. — Den Nachweis dieser Zulänglichkeit zu liefern, und die vorhandenen Beobachtungsresultate auf diesem Wege zu verwerthen, stelle ich mir hier zur Aufgabe; - nicht als ob ich meinte, dass die mechanische Wärmetheorie eines derartigen Nachweises zu ihrer völligen Bestätigung noch bedürfte, sondern nur in Absicht auf das formale oder methodische Interesse, welches jede directe, progressive Begründung eines allgemeinen und weitgreifenden Naturgesetzes schon insofern haben möchte, als der Beispiele so sehr wenige sind, wo eine solche möglich gewesen und wirklich ausgeführt worden ist.

Diese Aufgabe nun kommt offenbar darauf [7] zurück, den angegebenen Kreis von Erscheinungen, — die Temperaturveränderungen, welche die Gase durch Compression oder Dilatation erleiden - unabhängig von jeder theoretischen Voraussetzung zu erforschen, nämlich aus den Resultaten der Beobachtung und Messung die Gesetze abzuleiten, welche die fraglichen Vorgänge in ihrem quantitativen Verlaufe beherrschen. Lässt sich dies vollständig und in der erforderlichen Allgemeinheit ausführen - und der Erfolg wird es zeigen -- so muss in diesen Gesetzen implicite schon das Theorem enthalten sein, welches die mechanische Wärmetheorie zum Ausgangspunkte ihrer Untersuchungen macht, und muss sich vermöge einer mathematischen Analyse daraus entwickeln lassen. Ich habe daher nur darzulegen, wie die zur Zeit vorliegenden Experimentaluntersuchungen dazu verwandt werden können, die gedachten Wärmeerscheinungen bei den Gasen auf rein erfahrungsmässigem Wege bis zur Aufstellung eines solchen allgemeinen Gesetzes zu verfolgen.

Der hierbei einzuschlagende Gang ist durch die Natur des Gegenstandes hinreichend vorgezeichnet. — Die Erscheinung, um die es sich handelt, liegt, so wie sie unmittelbar der Beobachtung sich darbietet, in den Temperaturveränderungen, welche die verschiedenen Gasarten zeigen, wenn sie ohne Wärmeaustausch mit

der Umgebung verdichtet oder verdünnt werden. Es wird sich also zuerst darum handeln, die Gesetze für das Verhalten der einzelnen Gase rücksichtlich dieses Vorganges zu entdecken, d. h. die Abhängigkeit festzustellen, welche zwischen den Aenderungen des Volums (oder der Dichte) und denen der Temperatur besteht, — oder auch statt dessen die Regel, nach welcher während der Volumveränderung die Temperatur selbst mit der Dichte variirt. Der nächste Schritt wird darauf gerichtet sein, diese partiellen Gesetze nach zwei Seiten hin zu erweitern — einmal, sie loszutrennen von der beschränkenden Bedingung (des verhinderten Wärmeaustausches), an die ihre Gültigkeit geknüpft ist; ferner aber, sie unter ein allgemeineres Gesetz zu [8] subsumiren, welches alle Gase gleichzeitig umfasst. Dieses letztere wird alsdann unmittelbar auf die Relation führen, die das Grundtheorem der mechanischen Wärmetheorie ausmacht.

Ich wende mich jetzt zum ersten Theile der Aufgabe, und zwar beginne ich damit, die experimentellen Daten nachzuweisen, welche, zunächst für die atmosphärische Luft, das Gesetz der Temperaturänderungen vollständig festzustellen erlauben.

## II. Ableitung des Gesetzes der Temperaturänderungen bei den verschiedenen Gasen.

Es liegt meinem Zwecke fern, eine geschichtliche Darstellung der verschiedenen Experimentalarbeiten zu geben, welche die fraglichen Erscheinungen zum Gegenstande haben; es handelt sich nur um diejenigen darunter, die in ihren Resultaten eine genügende Grundlage zur Auffindung ihrer Gesetze darbieten. Ich wende mich daher sogleich zu derjenigen Experimentalarbeit, welche allein eine vollständige Reihe von Messungen geliefert hat — zu der von Gay-Lussac und Welter im Jahre 1823 (auf Laplace's Veranlassung, wie es scheint) unternommenen Versuchsreihe, deren Ergebniss sich in der Méc. cél. T. V. L. 124) niedergelegt findet. Von dieser muss ich zunächst reden, um darzulegen, welcher Art die durch sie gewonnenen Bestimmungen sind, und wie sich dieselben für den angegebenen Zweck verwerthen lassen.

Für die Anlage dieser Experimentaluntersuchung ist ein besonderer Umstand wesentlich maassgebend gewesen. Es ist bekannt, dass Laplace zuerst die lange Zeit räthselhafte Abweichung

<sup>1)</sup> Oeuvres DE LAPLACE, Tome 5me. 40, V u. 540 pp. Paris 1846. pp. 143 ff.]

der nach der Newton'schen Formel berechneten Geschwindigkeit der Schallfortpflanzung von der durch Beobachtung gefundenen aus den Temperaturänderungen, die in den Schallwellen eintreten, erklärte, indem [9] er so für die Vermutung Lagrange's, dass die Luft bei rascher Veränderung ein anderes als das Mariotte'sche Gesetz befolge, den physischen Grund auffand. Bior und Poisson, welche zuerst diesen Wärmewirkungen in der mathematischen Theorie der Schallfortpflanzung Rechnung trugen, zeigten, dass unter Berücksichtigung derselben dem Næwton'schen Ausdrucke für die Schallgeschwindigkeit

$$\tau^2 = \cdot g \cdot \frac{h}{\varrho} =: g \ k \ (1 \ + \alpha \ l)^{-1})$$

noch ein Factor  $\lambda$  zugefügt werden müsse, den sie durch die Gleichung

definirten, wo  $\omega$  die Temperaturänderung bedeutet, welche durch eine kleine Verdichtung  $\delta$  hervorgebracht wird (unter letzterer verstanden die Dichtigkeitszunahme gemessen durch die anfängliche Dichte). Folglich verlangte die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit die vorherige experimentelle Ermittelung noch einer neuen Constanten, und zwar nicht nur für einen einzigen, sondern, wenn es auf eine vollständige Beherrschung aller Verhältnisse abgesehen war, für alle möglichen, nach Dichte und Temperatur verschiedenen Zustände der Luft, also die Ermittelung der Regel, nach welcher diese Constante von  $\varrho$  und t abhängt.

Diese Vervollständigung der empirischen Daten zu [10] dem Zwecke, die Theorie der Schallfortpflanzung mit der Beobachtung in Einklang zu bringen, bezüglich die Laplace'sche Erklärung der Abweichung an der Erfahrung zu prüfen, scheint das einzige Ziel gewesen zu sein, welches Gay-Lussac und Welter bei ihrer Untersuchung vor Augen hatten. Der hierbei einzuschlagende Weg war

Ich stelle hier die Zeichen für die im Folgenden immer wiederkehrenden Grössen zusammen; es bedeutet

ρ die (Gewichts-) Dichte, das Gewicht der Volumeinheit des Gases;

p die Spannung, den Druck auf die Flächeneinheit;

t die Temperatur;

k den Quotienten  $\frac{\rho}{\varrho}$ , d. h. die ideale Druckhöhe oder den Elasticitätsmodulus des Gases, für den Anfangspunkt der Temperaturskale;

g, a, wie gewöhnlich.

ihnen durch die angeführte Definition der zu bestimmenden Grösse an die Hand gegeben. Es kam darauf an, für möglichst viele nach Dichte und Temperatur verschiedene Zustände der Luft zusammengehörige Werthe einer kleinen Verdichtung (oder Verdünnung) und der bewirkten Temperaturänderung zu messen, um aus einem Systeme solcher Bestimmungen die entsprechenden Werthe der Constanten  $\lambda$  herzuleiten.

Die Beobachtungsmethode, deren sich die französischen Physiker bedienten, beruht ihrem Wesen nach darauf, durch das Verhalten der Luft selbst die Temperaturänderungen zu erkennen, welche sie infolge von Compression oder Expansion erfährt, also den Träger der zu messenden Wirkungen auch zugleich als Mittel der Messung, als Thermometer, zu verwenden. — Wenn frühere Physiker mit Hülfe eines besonderen Thermometers die Erwärmung oder Abkühlung eines Luftquantums bei plötzlicher Volumänderung bestimmen wollten, so hatten sie offenbar mit einem äusserst complicirten Vorgange zu thun. Es trat ein Wärmeaustausch mit den Gefässwänden und der Masse des Thermometers ein; was man an diesem beobachtete, war nur das schliessliche Resultat eines sehr verwickelten Mischungsprozesses, und Niemand konnte von diesem auf die unbekannte Anfangstemperatur der Luftmasse zurückschliessen. Wie man sieht, hat daher die Erfindung eines directen Verfahrens der Temperaturmessung die genauere experimentelle Untersuchung der vorliegenden Erscheinungen allererst möglich gemacht. Ein solches aber ist schon durch das Princip der Temperaturbestimmung selbst an die Hand gegeben. Die Skale der Temperatur (insofern man diese nach dem Luftthermometer [11] rechnet) ist bekanntlich in absoluten Maassen definirt durch die Werthe der Constanten, die im Mariotte'schen Gesetze auftritt, d. i. des Quotienten  $\frac{P}{\rho}$  oder des Elasticitätsmodulus der Luft. Eine arithmetische Reihe der Werthe desselben stellt die Temperaturskale fest; und zwar ist die Gradeinheit durch einen unveränderlichen Bruchtheil ( $a = \frac{1}{273}$ ) von derjenigen Grösse bestimmt, die ihm unter den Verhältnissen des schmelzenden Eises zukommt. Die Gleichung, welche man als das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz bezeichnet

$$\frac{\cancel{P}}{\varrho} = \frac{\cancel{P}_0}{\varrho_0} (1 + at) = k(1 + at)$$

ist somit nichts anderes als die unmittelbare Definitionsgleichung

der Temperatur, und es folgt daraus von selbst, dass die directe Temperaturbestimmung in einem Luftquantum der Natur der Sache nach auf die Messung des Elasticitätsmoduls, d. i. auf die Messung von Druck und Dichte, zurückkömmt.

Nach diesen Grundsätzen 1) haben GAY-Lussac und Welter ihre Beobachtungen angestellt, indem sie sich zur praktischen Ausführung eines Verfahrens bedienten, das schon vor ihnen, in nur wenig anderer Gestalt von Clément u. Desormes zu gleichem Zwecke angewandt worden war. In einem grossen Ballon comprimirten sie die Luft (vollkommen ausgetrocknet) um einen geringen Bruchtheil über den äussern Druck, führten sodann durch Oeffnen des Ballons eine plötzliche Ausgleichung der Spannung, d. h. Dilatation des eingeschlossenen Luftquantums herbei und schlossen hierauf jenen rasch wieder ab. Mit Hülfe von Quecksilberhöhen wurden die drei auf einander folgenden Werthe der Spannung gemessen, nämlich die anfängliche der comprimirten Luft, p, die Ausgleichungsspannung, [12] d. h. der Druck der äussern Atmosphäre, p', endlich diejenige Spannung, welche die Luft zeigte, nachdem die eingetretene Temperaturerniedrigung wieder völlig verschwunden war, p". Diese bieten die hinreichenden Daten, sowohl die stattgehabte Ausdehnung δ, als auch die dadurch bewirkte Temperaturänderung ω zu berechnen; wie man leicht sieht, hat man

$$\delta = \frac{p'' \cdot p}{p}$$

und, wenn t die Anfangstemperatur bezeichnet,

$$\omega = \frac{1+a\ell}{a} \cdot \frac{p'-p''}{p''}$$

woraus die Grösse des Coefficienten  $\lambda$ , auf dessen Ermittelung es ankam, ohne weiteres herzuleiten ist.

Eine derartige Bestimmung haben GAY-LUSSAC und WELTER bei sehr verschiedenen Zuständen der Luft ausgeführt; nach LAPLACE'S Angabe (a. a. O.)<sup>2</sup>) umfassen ihre Versuche einen Spielraum, hinsichtlich der Temperatur von  $-20^{\circ}$  bis  $+40^{\circ}$  cent., hinsichtlich des Druckes von ca. o,2 bis 2 Atmosphären; und das Resultat ihrer Untersuchung ist gewesen: dass der so bestimmte Coefficient  $\lambda$  von

<sup>1)</sup> Der erste, der von ihnen Gebrauch gemacht hat, ist DALTON, welcher sich freilich zur Ausführung nur sehr roher Hülfsmittel bediente. ([Versuche über Wärme und Kälte, die bei mechanischer Verdichtung und Verdünnung der Luft entstehen.] GILBERT'S Annalen, Bd. 14 [1803, pp. 101 111.])

<sup>2) [</sup>Vgl. die Anm. auf S. 5.]

Temperatur und Dichte ganz unabhängig ist, — eine Constante darstellt, deren numerischen Wert sie == 1,349 fanden.

Dieses Resultat bietet eine genügende Grundlage für die Feststellung des Gesetzes der fraglichen Erscheinung dar und ist auch in der That hierzu schon benutzt worden; jedoch lässt sich gegen die Art und Weise, in der solches geschehen, manches einwenden. - Laplace hat statt der ursprünglichen Definition der Grösse \(\lambda\), auf welche sich ihre experimentelle Bestimmung gründet, eine andere mittelbare eingeführt, das Verhältniss der Wärmecapacität der Luft bei constantem Drucke zu der bei constantem Volum; und in Anschluss an diese Deutung von  $\lambda$  hat nun er selbst, sowie auch Poisson1), mit Hülfe noch anderer [13] Voraussetzungen, aus dem genannten Beobachtungsresultate verschiedene Consequenzen abgeleitet, welche zuletzt auf das Gesetz der Abhängigkeit zwischen Dichte und Temperatur (oder Spannung) in einer comprimirten Luftmasse hinführen. — Es muss zunächst schon auffallen, dass hierbei Begriffe herangezogen sind (wie der der Wärmemenge und Wärmecapacität), welche der Erscheinung an sich, - wenn man blos die Temperaturänderungen im Auge hat. - fern stehen; aber selbst abgesehen hiervon, haben sich (worauf ich hier nicht näher eingehen kann) die Hypothesen, auf welche LAPLACE und Poisson ihre Entwickelung gründen, als unzulässig erwiesen, wie denn auch andere von ihnen daraus abgeleitete Folgerungen als mit der Erfahrung im Widerspruch befunden worden sind.

Man kann jedoch ohne Schwierigkeit das Ergebniss der oben beschriebenen Versuche Gay-Lussac's und Weller's unmittelbar und ohne die Hülfe neuer Hypothesen zur Begründung des Gesetzes der betrachteten Vorgänge verwenden, da es für sich allein schon alle hierzu erforderlichen Bestimmungen darbietet.

Aus der Natur der Aufgabe weiss man im Voraus, welcher Art das Gesetz ist, um dessen Auffindung es sich handelt. Man kennt es offenbar vollständig, wenn man die Regel kennt, nach welcher in einer comprimirten oder dilatirten Luftmasse die Temperatur (oder auch die Spannung) von der veränderlichen Dichte abhängt, d. h. wenn man t als Function von  $\varrho$  ausgedrückt hat. Man braucht also nur zu fragen: in welcher Beziehung stehen die bei den beschriebenen Versuchen gemessenen Grössen zu dem gesuchten Abhängigkeitsgesetze? — welche Bedeutung kommt ihnen in Rücksicht auf die unbekannte Function zu?

<sup>1)</sup> Traité de Mécanique [2me éd. Paris, Bachelier, 1833.] T. II., 633 [p. 637] ff.

Die französischen Physiker stellten ein Luftquantum von bestimmter Dichte und Temperatur dar und beobachteten den Temperaturzuwachs, welcher einer kleinen Aenderung der Dichte ent-Die anfänglichen Werthe von  $\rho$  und t gaben die Verhältnisse, unter denen der Versuch 14 stattfand; er selbst diente nur zur Bestimmung des Quotienten  $\frac{\omega}{\delta}$ , auf dessen Bedeutung es daher allein ankommt. Bezieht man \alpha (welches unmittelbar die Temperaturzunahme  $\Delta t$  vorstellt) statt auf die relative Verdichtung  $\delta$  auf die absolute Zunahme der Dichte,  $\Box \varrho$ , so ist für  $\frac{\omega}{\delta}$   $\varrho \frac{\varDelta t}{\varDelta \varrho}$  zu setzen; da nun  $\varrho$  schon durch die Verhältnisse des Versuchs gegeben ist, so kann man die Ermittelung des Quotienten  $\frac{At}{da}$  als das eigentliche Ziel des letzteren bezeichnen. Dieser aber hat seine ganz bestimmte Bedeutung in der unbekannten Function, welche den Zusammenhang zwischen Temperatur und Dichte ausdrücken soll; er giebt das Verhältniss zusammengehöriger Zunahmen von t und  $\rho$ für die Anfangswerthe beider bei'm Versuche. Und nun leuchtet ein: da sich die Messungen nur auf sehr kleine Aenderungen beschränkten, so darf dieser empirisch bestimmte Differenzquotient als mit seinem Grenzwerthe für verschwindende Incremente zusammenfallend angesehen, er darf also für das wahre Wachsthumsverhältniss von t und  $\varrho$  in einer verdichteten oder verdünnten Luftmasse oder für den Differentialquotienten der gesuchten Function genommen werden. Damit lässt sich dann das Resultat der beschriebenen Versuche folgendermassen aussprechen: Gay-Lussac und Welter haben für eine Reihe verschiedener Zustände der Luft jedesmal den Differentialquotienten  $\frac{dt}{d\rho}$  gemessen, und aus dem erhaltenen Systeme solcher Bestimmungen, auf der einen Seite dieses Differentialquotienten, auf der andern der Werthe von / und  $\rho$ , für welche er gilt, haben sie die Relation hergeleitet

$$\frac{a\varrho}{1+at}\cdot\frac{dt}{d\varrho} = \text{Const.} = \lambda - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hiermit ist aber die Aufgabe im Wesentlichen schon gelöst. Die vorstehende, aus den Beobachtungen begründete Gleichung ist die Differentialgleichung des gesuchten Abhängigkeitsgesetzes zwischen t und  $\varrho$ , und es ist nur noch [15] eine rein mathematische Arbeit, daraus dieses selbst herzuleiten. Eine einfache Integration ergiebt

der Umgebung verdichtet oder verdünnt werden. Es wird sich also zuerst darum handeln, die Gesetze für das Verhalten der einzelnen Gase rücksichtlich dieses Vorganges zu entdecken, d. h. die Abhängigkeit festzustellen, welche zwischen den Aenderungen des Volums (oder der Dichte) und denen der Temperatur besteht, — oder auch statt dessen die Regel, nach welcher während der Volumveränderung die Temperatur selbst mit der Dichte variirt. Der nächste Schritt wird darauf gerichtet sein, diese partiellen Gesetze nach zwei Seiten hin zu erweitern — einmal, sie loszutrennen von der beschränkenden Bedingung (des verhinderten Wärmeaustausches), an die ihre Gültigkeit geknüpft ist; ferner aber, sie unter ein allgemeineres Gesetz zu [8] subsumiren, welches alle Gase gleichzeitig umfasst. Dieses letztere wird alsdann unmittelbar auf die Relation führen, die das Grundtheorem der mechanischen Wärmetheorie ausmacht.

Ich wende mich jetzt zum ersten Theile der Aufgabe, und zwar beginne ich damit, die experimentellen Daten nachzuweisen, welche, zunächst für die atmosphärische Luft, das Gesetz der Temperaturänderungen vollständig festzustellen erlauben.

# II. Ableitung des Gesetzes der Temperaturänderungen bei den verschiedenen Gasen.

Es liegt meinem Zwecke fern, eine geschichtliche Darstellung der verschiedenen Experimentalarbeiten zu geben, welche die fraglichen Erscheinungen zum Gegenstande haben; es handelt sich nur um diejenigen darunter, die in ihren Resultaten eine genügende Grundlage zur Auffindung ihrer Gesetze darbieten. Ich wende mich daher sogleich zu derjenigen Experimentalarbeit, welche allein eine vollständige Reihe von Messungen geliefert hat zu der von Gay-Lussac und Welter im Jahre 1823 (auf Laplace's Veranlassung, wie es scheint) unternommenen Versuchsreihe, deren Ergebniss sich in der Méc. cél. T. V. L. 124) niedergelegt findet. Von dieser muss ich zunächst reden, um darzulegen, welcher Art die durch sie gewonnenen Bestimmungen sind, und wie sich dieselben für den angegebenen Zweck verwerthen lassen.

Für die Anlage dieser Experimentaluntersuchung ist ein besonderer Umstand wesentlich maassgebend gewesen. Es ist bekannt, dass Laplace zuerst die lange Zeit räthselhafte Abweichung

<sup>1) [</sup>Oeuvres DE LAPLACE, Tome 5me. 40, V u. 540 pp. Paris 1846. pp. 143 ff.]

mögen; durch die Annahme nämlich, dass jenes Gesetz für alle verschiedenen Gase von derselben Art sei, d. h. durch einen mathematischen Zusammenhang von gleicher Form, wie der für den Fall der atmosphärischen Luft streng begründete, dargestellt werde. Und die Zulässigkeit dieser Hypothese wird kaum bezweifelt werden können, insofern man dabei nur die permanenten Gase im Auge hat, d. h. diejenigen, welche ohne merklichen Fehler als Repräsentanten des idealen Grenzzustandes der Körper betrachtet werden dürfen, der durch die Constanz des Elasticitätsmoduls und des Ausdehnungscoefficienten charakterisirt ist.

Diese Voraussetzung nun beschränkt die mögliche Verschiedenheit der individuellen Gesetze bei den einzelnen Gasen lediglich auf eine Verschiedenheit in den Werthen der darin auftretenden Constanten  $\lambda$ , welche demnach auch für alle durch die nämliche Differentialgleichung, wie bei der atmosphärischen Luft, definirt bleibt. (Gleich. (2) und (4).)

Mithin bestimmt sich der Werth dieser Constanten für sämmtliche Gasarten in gleicher Weise aus einer Gruppe zusammengehöriger Werthe der drei Grössen  $\frac{dt}{do}$ ,  $\varrho$ , t oder  $\frac{dp}{do}$ ,  $\varrho$ , p, und es genügt also zu ihrer numerischen Berechnung, nur für je einen einzigen Zustand letztere experimentell ermittelt zu haben. - Dulong hat diese Daten in seiner bekannten Arbeit über die Wärmecapacität der Gase!) geliefert; er hat in der That für eine Reihe von [17] cent. Temp. zusammengehörige Werthe der drei Bestimmungsstücke  $\varrho$ ,  $\rho$ ,  $\frac{d\rho}{do}$  gemessen, wie Gay-Lussac und Welfer für die verschiedenen Zustände der Luft gethan haben. 'Die Methode indess, nach welcher Dulong den Werth von  $\frac{dp}{do}$  ermittelte, ist von der der erstgenannten Physiker wesentlich verschieden. Während diese das Wachsthumsverhältniss von p u, q durch wirkliche empirische Messung correspondirender Zunahmen näherungsweise bestimmten, gelangt Dulong direct dazu, indem er einen physischen Vorgang zu Hülfe nimmt, bei welchem der Differentialquotient  $\frac{dp}{do}$  als solcher als maassgebendes Bestimmungsstück auftritt, so dass umgekehrt der beobachtete Erfolg auf ihn zurückschliessen lässt. Es ist der Vor-

<sup>1) [</sup>Untersuchungen über die specifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten.] POGGENDORFF's Annalen, Bd. 16. [1829. pp. 438 479.]

gang der Schallfortpflanzung, welcher in diesem Sinne Verwendung findet, und zwar ist es die Geschwindigkeit, mit welcher dieselbe in den verschiedenen elastischen Medien vor sich geht, welche die Bestimmungen vermittelt. Die Grundlage der Methode muss sonach wesentlich in dem theoretischen Nachweise des Zusammenhangs gesucht werden, welcher zwischen obigem Vorgange und dem Abhängigkeitsgesetze von Spannung und Dichte in den elastischen Flüssigkeiten besteht. Laplace und Poisson haben nun die Theorie der Schallfortpflanzung nach dieser Richtung hin vollständig entwickelt, und oben ist auch schon beiläufig das Resultat, zu welchem diese Entwickelung geführt hat, angegeben worden — dass nämlich, unter Berücksichtigung der Temperaturveränderungen, die mit der Dichtigkeitsänderung in den Schallwellen verbunden sind, die Schallgeschwindigkeit in einem Gase statt durch den Newton'schen Ausdruck durch die Gleichung

$$\tau^2 = g \cdot \lambda \cdot \frac{p}{\rho}$$

bestimmt sei. Sie gelangen zu dieser Formel, indem sie die Wärmewirkungen unmittelbar in Form einer Correction zum Mariotte'schen Gesetze in Rechnung bringen!), [18] und so ergiebt sich als Correctionsfactor der ursprüngliche Ausdruck

$$1 + \frac{\alpha}{1-\alpha t} \cdot \frac{\omega}{\delta}$$

für die mit à bezeichnete Grösse.

Genau genommen stehen indess diese Wärmewirkungen, obzwar der physische Grund der Spannungsänderungen, insoweit diese vom Mariotte'schen Gesetze abweichen, ganz ausserhalb der mathematischen Theorie der Schallfortpflanzung. Der Natur des Problems gemäss können dabei, wofern man das Physikalische vom Dynamischen getrennt hält, direct offenbar nur die Aenderungen des Druckes und der Dichte in dem elastischen Medium und das Abhängigkeitsgesetz zwischen beiden in Betracht kommen, während deren Ursachen ganz ausser Spiel bleiben; und in der That lässt sich auch, wie es durch Prof. RIEMANN kürzlich geschehen<sup>2</sup>), die Grundgleichung für die Schallfortpflanzung ganz allgemein entwickeln, ohne über jenes Gesetz irgend eine bestimmte Annahme zu machen.

<sup>1)</sup> Poisson, Traité de Mécanique [2<sup>m0</sup> éd. Paris, Bachelier, 1833.] T. II. 656 [p. 693] ff.

<sup>2)</sup> Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen [von endlicher Schwingungsweite. Gött. Nachr., 1859, pp. 192-197].

Es zeigt sich dann, dass die Schallgeschwindigkeit allein bedingt ist durch den Werth des Wachsthumsverhältnisses  $\frac{dp}{d\varrho}$  zwischen Druck und Dichte, welcher dem Gase unter den betreffenden Verhältnissen zukommt, indem nämlich ihr Ausdruck wird

$$v^2 = g \frac{dp}{d\rho}$$
.

Mithin kann auch umgekehrt aus der beobachteten Größe des v unmittelbar auf nichts anderes zurückgeschlossen werden, als auf dieses Wachsthumsverhältniss, wie es während der rasch erfolgenden Compressionen und Dilatationen in den Schallwellen besteht. In diesem Sinne ist es gemeint, wenn ich oben sagte, Dulong habe [19] für jedes Gas zusammengehörige Werthe der drei Grössen  $\varrho, p, \frac{dp}{d\varrho}$  gemessen, und daraus den Werth von  $\lambda$  vermöge der Relation (4) abgeleitet; es wird hierin im Wesentlichen dadurch nichts geändert, dass man diese Relation mit in den Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit aufnimmt, indem man ihn in der Form

$$\tau^2 = g \lambda \frac{f}{g}$$

schreibt, und nun  $\lambda$  direct aus  $v^*$  berechnet.

Auf die Methode, deren sich Dulone zur indirecten Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen bedient hat, brauche ich hier nicht näher einzugehen, und ebensowenig würde es einen Zweck haben, die für  $\hat{\lambda}$  gefundenen Zahlen hier zusammenzustellen, da ich weiter unten noch einmal auf die Resultate dieser nach mehr als einer Seite hin interessanten Experimentalarbeit zurückkommen werde.

## III. Ableitung des Gesetzes für die Integralwerthe der Compressionswirkung.

Durch das Bisherige sind für eine Reihe verschiedener Gase die Gesetze festgestellt, welche die Erscheinung, die den Gegenstand der Untersuchung bildet, beherrschen; und es sind die vollständigen Gesetze, wenn man die Erscheinung unter der bis jetzt festgehaltenen Beschränkung betrachtet: dass während der Volumänderung jeder Wärmeaustausch mit der Umgebung ausgeschlossen ist.

Wiewohl nun letzteres die Bedingung ist, an welche sich das ungestörte Zustandekommen der Erscheinung geknüpft erweist, so bemerkt man doch, dass die fraglichen Wirkungen an sich keineswegs an diese Beschränkung gebunden sind. Die thermometrischen Wirkungen der Dichtigkeitsänderung in den Gasen bleiben offenbar auch bestehen, [20] wenn jene Voraussetzung nicht erfüllt ist, nur dass sie alsdann nicht den früheren Erfolg hervorbringen, indem letzterer durch die hinzutretenden äussern Einflüsse mehr oder minder modificirt wird. – Es entsteht daher nun die weitere Forderung: ein allgemeines Gesetz anzugeben, nach welchem die von den Dichtigkeitsänderungen herrührenden Temperaturänderungen unter allen Verhältnissen, auch da, wo sie sich mit andern Wirkungen combiniren, bestimmt werden können.

Man denke sich ein Gasquantum condensirt oder expandirt, aber so, dass während dessen seine factische Temperatur (durch Wärmezuführung oder -entziehung) willkürlich modificirt wird. - -Die Aenderung der Dichte bringt für sich nach einer bestimmten Regel eine Aenderung der Temperatur hervor. Wenn die factische Temperatur nicht dieser gemäss verläuft, so kann dies nur dadurch geschehen, dass sich noch eine zweite Temperaturveränderung mit jener combinirt. Man muss also während des Compressionsvorganges zwei verschiedene Temperaturänderungen gleichzeitig neben einander hergehend denken; die eine entspringt aus der thermometrischen Wirkung der Compression, die andere aus den fremdartigen Wärmeeinflüssen; und der factische Temperaturverlauf muss als die Resultante aus beiden angesehen werden. - Die Frage ist: wie setzt sich diese Resultante aus den Einzelwirkungen zusammen; und wie kann der Gesammterfolg wieder in seine Bestandtheile zerlegt werden?

Die Gasmasse sei durch die Crompression oder Dilatation bei einem bestimmten Zustande,  $\varrho$ ,  $\vartheta$  angekommen (indem ich jetzt die wirklich eintretenden Temperaturen durch  $\vartheta$  bezeichne). Der weitere Verlauf hängt davon ab, wie von diesem Momente an die Temperatur mit der Dichte wächst vermöge der äusseren Einwirkung und wie vermöge der blossen Dichtigkeitsänderung. Das erste Wachsthum werde durch  $\frac{d\tau}{d\bar{\varrho}}$ , das zweite durch  $\frac{dt}{d\bar{\varrho}}$  bezeichnet; |21| dann ist dasjenige der factischen Temperatur  $\vartheta$  offenbar die algebraische Summe dieser, also

welche Gleichung mithin die Grundgleichung für das Fortschreiten

der Temperaturänderung in jedem Augenblicke darstellt. — Es muss nun  $\frac{d\tau}{d\varrho}$  als eine gegebene Function von  $\varrho$  angesehen werden, insofern dadurch erst die Art der äussern Einwirkung festgestellt ist; es bleibt also nur  $\frac{dt}{d\varrho}$  zu bestimmen übrig.

Wie die Temperatur in einem beliebigen Augenblick mit der Dichte wachsen würde, wenn das Gas nicht gleichzeitig von aussen einer Temperaturänderung unterworfen wäre, ist oben schon festgestellt; die durch die Beobachtungen von GAY-LUSSAC und WELTER begründete Gleichung (2), aus welcher

$$\frac{dt}{d\varrho} = \overline{\lambda - 1} \cdot \frac{\frac{1}{\alpha} + t}{\varrho}$$

folgt, liefert diese Bestimmung. Man übersieht nun aber: das Gesetz, nach welchem die Temperatur in jenem Falle wachsen würde, ist zugleich dasjenige, nach welchem sie unter allen Verhältnissen vermöge der Verdichtung wächst, wofern man nur die sehr nahe liegende Annahme machen darf, dass eine gleichzeitig nebenhergehende äussere Einwirkung den Effect der Dichtigkeitsänderung nicht in seinem continuirlichen Entstehen, sondern nur in seinem Erfolge modificirt, -- in anderen Worten, wenn man sich das Zusammenwirken der innern und der äussern Temperaturänderungen im Gase als eine blosse Superposition, bei der keine wechselseitige Störung stattfindet, vorstellen darf. Diese Voraussetzung macht die aus GAY-LUSSAC's und WELTER's Versuchen gezogene Relation unabhängig von der beschränkenden Bedingung, die ihr ursprünglich anhaftet, sie macht daraus ein Gesetz, dessen Gültigkeit sich auf alle Verhältnisse erstreckt, welches mithin als das eigentliche [22] Grund gesetz der fraglichen Vorgänge anzusehen ist. -- Und nun kann die Aufgabe leicht zu Ende geführt werden.

Das Wachsthum der durch die Dichtigkeitsänderung allein bedingten Temperaturzunahme ist diesem Gesetze zu Folge in jedem Augenblicke vollständig bestimmt durch die eben vorhandene Dichte  $\varrho$  und Temp.  $\vartheta$ , vermöge der Gleichung nämlich

$$\frac{dt}{d\varrho} = \overline{\lambda - 1} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \vartheta}{\varrho} \qquad (7)$$

und die Grundgleichung für das Zusammenwirken des innern und des äussern Temperatureffectes wird also

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{d\tau}{d\rho} + \frac{1}{\lambda - 1} \cdot \frac{\frac{1}{a} + \theta}{\rho} \qquad (8)$$

Der Uebergang von diesem Gesetze des Wachsens zu dem der wachsenden Grössen selbst ist jetzt eine rein mathematische Aufgabe. Denkt man zunächst die Regel bestimmt, nach welcher während der Compression die Temperatur des Gases von aussen modificirt wird, d. h. denkt man  $\frac{d\tau}{d\varrho}$  als Function von  $\varrho$  gegeben, so führt die Integration zu dem Gesetze, nach welchem die factische Temperatur mit der Dichte variirt. — Der Factor  $\varrho^{-(\lambda-1)}$  ergänzt die beiden Glieder mit  $\vartheta$  zu einem vollständigen Differential, und die Integration ergiebt dann

$$\frac{\frac{1}{a} + \theta}{e^{\lambda - 1}} = \int \frac{1}{e^{\lambda - 1}} \frac{d\tau}{d\varrho} d\varrho + \text{Const.}$$

und indem man die Constante durch die in einem beliebigen Anfangszustande zusammengehörigen Werthe von  $\varrho$  und  $\vartheta$  ausdrückt, erhält man schliesslich

$$\frac{\frac{1}{a} + \theta}{\frac{a}{\varrho^{\lambda - 1}}} = \frac{\frac{1}{a} + \theta_1}{\frac{a}{\varrho^{\lambda - 1}}} + \int_{\theta_1}^{\frac{\varrho}{\lambda - 1}} \frac{1}{d\varrho} d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

[23] Diese Gleichung stellt das allgemeine Gesetz der Compressiousvorgänge dar, indem sie den Verlauf der Temperatur in einer Gasmasse, wenn diese in irgend welcher Weise von aussen Temperaturänderungen erleidet, bestimmen lässt.

Das früher gefundene specielle Gesetz ist darin, wie man sieht, als besonderer Fall enthalten. Es ergiebt sich unmittelbar, sowie man  $\frac{dr}{d\varrho}=0$  setzt, so dass das Integral wegfällt; und ebenso kann die obige Gleichung für jeden andern bestimmten Fall specialisirt werden, indem man nur für  $\frac{dr}{d\varrho}$  jedesmal die Function von  $\varrho$  setzt, welche der Art der äussern Einwirkung entspricht.

Da  $\frac{d\tau}{d\varrho}$  denjenigen Theil des Temperaturwachsthums in jedem Augenblicke darstellt, der in dem Wärmeaustausch mit der Um-ABBE, Gesammelte Abhandhungen II.

gebung seinen Grund hat, so würde man unter  $\tau$  selbst die Function von  $\varrho$  zu denken haben, welche den Integralwerth aller aus dieser Quelle stammenden Temperaturineremente zwischen dem Anfangs- und dem Endzustande, noch um eine beliebige Constante vermehrt, ausdrückt. Diese Constante kann man nun auch so wählen, dass die dergestalt bestimmte Function  $\tau$  für den Anfangszustand  $\varrho_1$  mit dem Werthe der factischen Temperatur zusammensammenfällt, also  $\tau_1 = \theta_1$  wird, und dann repräsentirt offenbar  $\tau$  den Temperaturverlauf, wie er unter alleiniger Wirksamkeit der äussern Ursachen — wenn also die Dichtigkeitsänderung für sich wirkungslos wäre — eintreten würde. Unter dieser Annahme kann man in der Gleichung (9) partiell integriren, und erhält dann, wenn man  $\frac{1}{\mu} = \tau$  einführt,

$$\frac{\frac{1}{a} + \vartheta}{\frac{a}{\varrho^{\lambda} - 1}} = \frac{\frac{1}{a} + \tau}{\frac{e^{\lambda} - 1}{\varrho^{\lambda} - 1}} + \int_{\varrho_{1}}^{\varrho} \frac{\lambda}{\varrho^{\lambda}} \left(\frac{1}{a} + \tau\right) d\varrho,$$

woraus folgt

[24] 
$$\vartheta = \tau = \varrho \lambda^{-1} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{\lambda}{\varrho^{\lambda}} \left( \frac{1}{a} + \tau \right) d\varrho \quad . \tag{10}$$

welche Gleichung also den Ueberschuss der factischen Temperatur über den von aussen bedingten Werth, mithin, auf Grund des angenommenen Princips der Superposition, den Integralwerth der zwischen  $\varrho_1$  und  $\varrho$  durch die Dichtigkeitsänderungen bewirkten Temperaturzunahmen darstellt.

Dieser Integralwerth der Compressionswirkung erscheint hier als abhängig von dem von aussen herrührenden Theile des Temperaturverlaufs. Es leuchtet aber ein: unmittelbar ist derselbe nicht durch diesen, sondern vielmehr durch den factischen Temperaturverlauf bedingt, indem der Werth von  $\frac{d\ell}{d\varrho}$  in jedem Momente der Veränderung durch die eben vorhandenen Werthe von  $\varrho$  und  $\vartheta$  bestimmt wird. Man erhält ihn aber leicht auch in dieser Form ausgedrückt, indem man nur die Elementargleichung (8) so integrirt, dass man  $\vartheta$  als Function von  $\varrho$  gegeben denkt. Denn dann ergiebt sich unmittelbar

$$A\theta = A\tau + \lambda - 1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \theta$$

$$= d\theta + \lambda - 1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \theta d\theta + \dots$$
 (11)

(wenn  $\vartheta - \vartheta_1 = A\vartheta$ ;  $\tau - \tau_1 = A\tau$  gesetzt wird). Und diese Gleichung giebt die Regel, uach welcher unter allen Verhältnissen ein beliebiger Zuwachs der wirklichen Temperatur in seine beiden Bestandtheile zerlegt werden kann, wofern der Verlauf der ersteren während der Veränderung gegeben ist. Der aus der Compressionswirkung entspringende Theil, der Integralwerth der inneren Temperaturzunahme, ergiebt sich

$$At = \lambda - 1 \int_{0}^{\varrho} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\varrho} d\varrho \qquad (12)$$

der von aussen herrührende Theil

[25] 
$$A\tau = A\theta \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{1}{a} + \theta d\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ich will die eben entwickelten Gesetze beispielsweise auf einen speciellen Fall anwenden, der ein experimentelles Interesse hat, auf denjenigen nämlich, der bei Bestimmung der Wärmecapacität der Gase vorliegt. Eine Gasmasse werde unter constantem Drucke  $p_1$  von einer anfänglichen Temp.  $\theta_1$  auf eine beliebige andere  $\theta$  erwärmt; welches ist die Summe der von aussen zu bewirkenden Temperaturveränderungen?

Durch die Bedingung des constant bleibenden Druckes ist der Verlauf der factischen Temperatur während des Vorganges völlig bestimmt; denn aus der Mariotte-Gay-Lussac'schen Gleichung folgt

$$\frac{1}{a} + \vartheta = \frac{p_1}{ak\varrho}$$

Mithin ist

$$At = \frac{\lambda - 1 \cdot p_1}{ak} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{\lambda - 1 \cdot p_1}{ak} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho} \right)$$

wofür, wenn man statt  $\varrho$  das Volum der Gewichtseinheit,  $\frac{1}{\varrho} = v$ .

$$A/ = \frac{\lambda - 1 \cdot p_1}{ak} (v_1 - v)$$

geschrieben werden kann. Die Aenderung der wirklichen Temperatur ist nun

$$A\theta := \frac{P_1}{ak} \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1} \right) := \frac{P_1}{ak} \left( v - v_1 \right)$$

also die von aussen herrührende Temperaturzunahme

$$\Delta \tau := \lambda \frac{f_1}{ak} \left( v - v_1 \right)$$

Man ersieht hieraus; die von aussen zu bewirkende Temperaturänderung ist im Verhältniss von  $\lambda:1$  grösser als die wirklich eintretende Zunahme, indem der Theil |26|  $\frac{\lambda-1}{\lambda}$  von ersterer zur Ausgleichung der Compressionswirkung aufgewendet wird.

Ebenso führen die oben entwickelten Gesetze in jedem andern Falle zu einer Analyse der eintretenden Veränderung des Wärmezustandes. Die Grundlage derselben beruht in der Gleichung (12), die die Regel enthält, nach welcher der Gesammteffect der Dichtigkeitsänderung bis zu irgend einem Punkte durch den Weg bedingt ist, welchen der Zustand der Gasmasse bis dahin thatsächlich durchlaufen hat. Es ist nun interessant, zu bemerken, dass das hierbei maassgebende Bestimmungsstück durch einen Ausdruck wiedergegeben werden kann, dem eine einfache und unmittelbar definirbare Bedeutung zukommt. Führt man nämlich statt der veränderlichen Temperatur θ, vermöge der Gleichung

$$p = k\varrho (1 + \alpha\theta)$$

die Spannung / ein, so wird aus Gleich. (12)

$$.1t := \frac{\lambda - 1}{ak} \int_{\varrho_2}^{\varrho} \frac{p}{\varrho^2} \ d\varrho$$

Es ist aber hier

$$\frac{1}{\varrho^2} = -\frac{d\binom{1}{\varrho}}{d\varrho} = -\frac{dv}{d\varrho},$$

wenn wie oben durch v das Volum der Gewichtseinheit des Gases bezeichnet wird, und man erhält daher mit v als neuer Variabeln

Das Integral hat nun eine bestimmte physische Bedeutung; es ist die mechanische Arbeit, welche während der Volumveränderung an der Begrenzungsfläche der Gasmasse geleistet wird; und mithin lässt sich das schliessliche Resultat der obigen Entwickelungen in den Worten aussprechen: Der Integralwerth der aus der Dichtigkeitsänderung entspringenden Temperaturänderungen ist unter allen Verhältnissen proportional der von dem Gase nach aussen geleisteten [27] Arbeit, und zwar für jede Gasart proportional vermöge des Factors  $\frac{\lambda-1}{a}$  (wobei den verschiedenen möglichen Fällen natürlich durch die Vorzeichen Rechnung getragen wird, was keiner weiteren Erörterung bedarf).

## IV. Feststellung des Gesetzes f ür die erzeugten oder verbrauchten W ärmemengen.

So weit sind die Erscheinungen, auf welche die Untersuchung gerichtet ist, auf vollständige und allgemeine Gesetze zurückgeführt, und zwar beziehen sich diese auf solche Bestimmungsstücke (Temperatur und Dichte oder Volum), die unmittelbar empirisch gegeben sind und vermöge welcher jeue Gegenstand der Beobachtung werden.

Ein weiterer Fortschritt eröffnet sich der Untersuchung durch Einführung desjenigen Begriffes, durch dessen Vermittelung der Grund der Temperaturerscheinungen überhaupt in den Körpern, als ihren Trägern, vorstellig gemacht wird. Das ist die Vorstellung von in den Körpern enthaltenen Wärmemengen, deren Zu- oder Abnahme man die Veränderungen zuschreibt, auf welche man sich unter dem Namen der Temperatur bezieht.

Es ist leicht zu übersehen, wie sich jene im vorliegenden Falle als Bestimmungsstück einführen. Ein Gasquantum zeigt eine Erhöhung der Temperatur, wenn es verdichtet, eine Erniedrigung derselben, wenn es verdünnt wird. Das erste setzt eine Vermehrung, das andere eine Verminderung der in ihm enthaltenen (freien) Wärme voraus; die Compression also erzeugt oder entbindet eine

bestimmte Wärmemenge, infolge der Dilatation dagegen verschwindet eine solche. Der Gegenstand der betrachteten Erscheinungen fällt sonach in die Veränderungen, welche die in den Gasen enthaltene Wärmemenge erfährt, insofern diese als [28] der primäre Grund der Temperaturveränderungen angesehen werden können; und es entsteht also die Frage; nach welchen Gesetzen bestimmen sich diese erzeugten oder verbrauchten Wärmemengen?

Der Uebergang von den Temperaturänderungen zu denen der Wärmemenge wird im allgemeinen durch einen besonderen Begriff, die Wärmecapacität, vermittelt, welcher in Bezug auf den Zusammenhang zwischen jenen beiden der specifischen Natur der Körper Rechnung trägt. Die Wärmecapacität ist definirt als diejenige Wärmemenge (in dem gebräuchlichen Maasse gemessen), die der Gewichtseinheit des betreffenden Stoffes eine Temperaturänderung — 1 ertheilt, und muss also, insofern man eine Abhängigkeit dieser Grösse von den Verhältnissen offen lässt, durch den Grenzwerth zusammengehöriger Zunahmen der Wärmemenge (Q) und Temperatur (3) ausgedrückt gedacht werden:

$$c = \frac{dQ}{d\theta}$$

Damit lassen sich nun die oben entwickelten allgemeinen Gesetze ohne weiteres auf die Wärmemengen übertragen, indem man darin nur auf die Elemente zurückgeht. Man erhält offenbar, für die Gewichtseinheit gerechnet, die Wärmemenge, die der factischen Temperaturänderung entspricht, welche also die Zunahme der im Gase wirklich enthaltenen freien Wärme vorstellt

$$Q_{\theta} = \int_{\varrho_{1}}^{\varrho} c \cdot d\theta;$$

ferner diejenige Grösse, die den von aussen bewirkten Temperaturänderungen entspricht, und die mithin als dem Gase von aussen zugeführt zu betrachten ist

$$Q_{\tau} = \int_{\varrho_{t}}^{\varrho} e \cdot d\tau$$

[29] und endlich die durch die Compressionswirkung erzeugte (oder, je nach dem Vorzeichen, verbrauchte) Wärmemenge

$$Q_{\ell} = \int_{\varrho_{1}}^{\varrho} c \cdot d\ell = \overline{\lambda - 1} \int_{\varrho_{1}}^{\varrho} c \frac{\left(\frac{1}{\alpha} + \vartheta\right)}{\varrho} d\varrho \quad . \quad . \quad (15)$$

$$= -\frac{\lambda - 1}{ak} \int_{\nu_{1}}^{\nu_{1}} c \rho d\nu$$

wobei natürlich zwischen diesen drei Werthen die Relation besteht:

$$Q_{\theta} = Q_{\epsilon} + Q_{\epsilon}$$

Wie man sieht, tritt auf diese Weise die Wärmecapacität als bestimmendes Stück in die Ausdrücke ein, und es entsteht daher die Frage, nach welchem Gesetze dieselbe von den ursprünglichen Variabeln abhängt. Es muss die Möglichkeit offen bleiben, dass ihr Werth bei ein und demselben Gase für verschiedene Zustände verschieden ist; und da alle mögliche Verschiedenheit hierin zuletzt auf Verschiedenheit der Werthe von Dichte und Temperatur beruht, so muss  $\varepsilon$  im allgemeinen als eine Function dieser beiden betrachtet werden, um deren nähere Bestimmung es sich also zunächst handelt.

Die Experimentirkunst hat keine Mittel gefunden, die Wärmecapacität eines Gases direct zu messen. Was man unmittelbar bestimmt hat, ist nur die Wärmemenge, welche ein Gasquantum aufninmt, wenn es unter constantem Drucke seine Temperatur um eine gewisse Grösse ändert; und seit man die Wärmewirkungen der Volumveränderung kennt, versteht es sich von selbst, dass diese Bestimmung, für sich genommen, das Gesuchte nicht geben kann. Zuvor muss vielmehr festgestellt sein, welcher Theil der so aufgenommenen Wärme zur Ausgleichung der Compressionswirkung dient, oder, umgekehrt, welches die Temperaturzunahme Ar ist, zu deren Hervorbringung jene in Wirklichkeit gedient hat. So kommen also schon bei der Bestimmung dieses Fundamentaldatums die Gesetze der Compressionserscheinungen in Anwendung. LAPLACE hat nun, wie bekannt, diese Anwendung zuerst gemacht, und hat [30] nachgewiesen, indem er von der ursprünglichen Definition der Grösse  $\lambda$ bei den Gay-Lussac'schen Versuchen ausging, dass die wahre Wärmecapacität eines Gases, c. aus der direct beobachteten scheinbaren Grösse C (der sog. Wärmecapacität bei constantem Druck) vermöge

der Gleichung  $\frac{C}{c} = \lambda$  herzuleiten sei. — Oben ist beispielsweise die Analyse des fraglichen Vorganges von der gewonnenen allgemeinen Grundlage aus durchgeführt worden, und es ergab sich, dass die Temperaturzunahmen Ar und  $A\theta$  sich wie  $\lambda:1$  verhalten, dass mithin der Quotient  $\frac{AQ}{A\tau} = c$  der  $\lambda$ te Theil von  $\frac{AQ}{A\theta} = C$  ist.

Auf Grund dieser Bestimmungen hat nun auch die Frage nach der Abhängigkeit der Wärmecapacität von Dichte und Temperatur ihre (und zwar wohl endgültige) Erledigung gefunden, wiewohl erst in neuerer Zeit durch die umfassenden Arbeiten Regnault's. Aus seinen Messungen bei geht hervor, dass für je ein Gas die Wärmemenge, die zu einer gleichen Temperaturerhöhung unter constantem Drucke erfordert wird, unter allen Verhältnissen dieselbe ist (innerhalb der weiten Grenzen, zwischen welchen seine Messungen, bei der Luft wenigstens, sich bewegen); und hieraus folgt, da der Coefficient à constant ist, dass auch die Wärmecapacität  $\varepsilon$  eine constante sein muss.

Diesem gemäss nimmt nun der Ausdruck für die durch die Dichtigkeitsänderung erzeugte oder verbrauchte Wärmemenge die Form an:

$$Q_{\ell} = \overline{\lambda - 1} \cdot c \int_{Q_{\ell}}^{Q_{\ell}} \frac{1}{a} \frac{d}{\varrho} d\varrho = \frac{\lambda - 1 \cdot c}{a k} \int_{r_{\ell}}^{r_{\ell}} r dr . \qquad (16)$$

und ferner erhält man

$$Q_{r} = c \cdot 1\theta + \frac{\lambda - 1 \cdot c}{ak} \int_{v_{1}}^{v_{2}} p dv \qquad (17)$$

[31] als Ausdruck für die Wärmemenge, die zu einer beliebigen Veränderung eines Gasquantums (nach Temperatur und Dichte) erfordert wird.

Es bleibt jetzt noch ein letzter Schritt zu thun übrig. -- Die Wärmemenge, welche durch die Dichtigkeitsänderung verbraucht wird, ist, den obigen Gesetzen zu Folge, bei jedem Gase der dabei geleisteten mechanischen Arbeit proportional; der Factor aber,

<sup>1) [</sup>Untersuchungen über die specifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten.] POGGENDORF's Annalen. Bd. 89. [1855. pp. 335 -348.]

der beide auf einander bezieht, hängt von den besonderen Werthen ab, welche den Grössen c, k, \(\lambda\) zukommen, muss also für jede Gasart einzeln berechnet werden. c und k sind nur ursprüngliche, das Gas charakterisirende Bestimmungsstücke;  $\lambda$  ist der Coefficient, welcher allein auf das thermometrische Verhalten des Gases bei der Dichtigkeitsänderung sich bezieht und vermöge Gleichung (12) dieses Verhalten auch vollständig bestimmt. Man übersieht, welches Interesse es haben muss, dass es möglich ist, diesen Coefficienten selbst wieder auf die übrigen Bestimmungsstücke zurückzuführen, d. h. eine Regel anzugeben, nach welcher sein Werth schon aus den Werthen der letzteren abgeleitet werden kann. Dadurch verliert er den Charakter eines neuen selbständigen Elements zur Bestimmung des Verhaltens der Gase; er ist hiernach schon in den übrigen Elementen eingeschlossen, und mithin jenes Verhalten, auch hinsichtlich der neuen Erscheinung, durch letztere allein schon völlig charakterisirt. — Dulong hat diese Zurückführung der Constanten  $\lambda$  in der That ausgeführt; sie ist enthalten in dem bekannten Resultate, welches er aus seinen, oben angeführten Versuchen gezogen hat: dass nämlich gleiche Volumina aller Gase unter gleichem Druck bei gleicher Compression oder Dilatation dieselbe Wärmemenge entbinden oder absorbiren, während die dadurch bewirkten Temperaturänderungen den Wärmecapacitäten für gleiche Volumina umgekehrt proportional sind. Die Analyse der Schlussfolgerung, durch die Dulong diesen Satz hergeleitet hat, zeigt, dass er im Wesentlichen nur ein Gesetz ausspricht, nach welchem der Werth des  $\lambda$  für die [32] verschiedenen Gase aus den Grössen c und k sich bestimmt. Er geht davon aus, dass  $\lambda-1$  die Temperaturänderung vorstellt, welche eine plötzliche Compression oder Dilatation um den Bruchtheil a hervorbringt, was er aus der Deutung von λ als Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten schliesst, was aber auch unmittelbar aus der Definition folgt, welche oben auf Grund der Gay-Lussac'schen Versuche für diesen Coefficienten aufgestellt wurde. Die Temperaturänderung bei gleicher Compression (wegen der Gleichheit des Ausdehnungscoefficienten a) besagt also nichts anderes als den Werth von  $\lambda - 1$ bei den verschiedenen Gasen. Indem er nun aus den Bestimmungen von de la Roche und Bérard über die Wärmecapacitäten bei constantem Druck mit Hülfe der von ihm gefundenen Werthe des à die bei constantem Volum, d. h. die wirklichen specifischen Wärmen der einzelnen Gasarten, und zwar auf gleiche Volumina bezogen, ableitet, ergiebt sich der Werth des à -1 als diesen letzteren umgekehrt proportional, eine Relation, welche auch durch die neueren genaueren Daten der oben 1) erwähnten REGNAULT'schen Arbeit wenigstens für die dem Condensationspunkte ferner stehenden Gase so weit bestätigt wird, als die Schwierigkeit der zu Grunde liegenden Messungen nur irgend erwarten lässt.

Es besteht also die Gleichung

$$\lambda - 1 = \frac{\text{Const.}}{2}$$

wenn unter  $\gamma$  die auf die Volumeinheit bezogene Wärmecapacität verstanden wird. Um auf die Gewichtseinheit zurückzugehen, hat man nun

$$\gamma = (-\varrho^{-2})$$

zu setzen; und da die Dichte unter gleichem Drucke und gleicher Temperatur der specifischen Elasticität & umgekehrt proportional ist, so lässt sich obige Relation offenbar durch

$$\lambda = 1$$
: Const.  $\frac{k}{\epsilon}$ 

[33] identisch ersetzen. Folglich hat und dies ist das bedeutsame Ergebniss der Dulong'schen Untersuchung -- der Quotient

$$\frac{\lambda \cdot 1 \cdot c}{k}$$

für alle Gase ein und denselben Werth. Letzterer ist aber, wie man sieht, bis auf den ebenfalls constanten Divisor  $\alpha$ , zugleich der Coefficient, welcher in den zuletzt entwickelten Gesetzen die bei der Dichtigkeitsänderung verbrauchte Wärme der geleisteten Arbeit proportional macht. Man hat also auch

$$\frac{\lambda - 1 \cdot c}{ak} = \text{Const.} - A \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und die Gleichung (17) nimmt daher schliesslich die Form an:

$$Q_{\tau} = Q_{\theta} + A \int_{\tau_1}^{\tau} p \cdot d\tau \qquad (19)$$

Die Wärmemenge, welche ein Gasquantum während irgend welcher Veränderung aufnimmt, ist gleich dem Zuwachse seiner freien Wärme  $(Q_{\theta} = c + \Delta \theta)$  vermehrt um die in Folge der Dichtigkeitsänderung verbrauchte Wärme; und diese ist bei allen Gasen

<sup>1) [</sup>p. 24.]

<sup>2) [</sup>Im Original steht, offenbar infolge eines Schreibfehlers,  $\frac{c}{\varrho}$  statt  $c \cdot \varrho$ ].

vermöge ein und desselben unveränderlichen Factors der geleisteten äussern Arbeit proportional.

#### V. Die Aequivalenz von Wärme und mechanischer Arbeit.

Ich bin im Vorstehenden von der Aufgabe ausgegangen, einen bestimmt abgegrenzten Kreis von Erscheinungen nach erfahrungsmässiger Methode auf ihre Gesetze zurückzuführen, und die zu Gebote stehenden experimentellen Bestimmungen haben genügende Grundlagen dargeboten, diese Aufgabe Schritt für Schritt bis zu ihrer allgemeinen und vollständigen Lösung zu verfolgen. Die letztentwickelte Relation ist das schliessliche Resultat dieser [34] Untersuchung; es kömmt ihr daher von jenem Standpunkte aus unmittelbar keine andere Bedeutung zu als die, das Fundamentalgesetz der fraglichen Erscheinungen in seiner allgemeinsten Gestalt auszusprechen.

Als solches leistet sie, was jedes Gesetz der Art in seinem Bereiche leistet. Sie bietet die Mittel, die Erscheinungen, wenn die äussern Umstände gegeben sind, vollständig vorauszubestimmen; auch für solche Verhältnisse, die ausserhalb des Gebietes ihrer Begründung stehen. Diese Anwendung liegt, bis ins Einzelne ausgeführt, in den Entwickelungen der mechanischen Wärmetheorie vor, die von der entgegengesetzten Seite, indem sie das Princip der Aequivalenz für die Bedingungen des Gaszustandes specialisirt, grade die obige Gleichung zum Ausgangspunkte erhält.

Jene Beherrschung der Erscheinungen in ihrem Erfolge, ist aber nicht das Einzige, was den auf erfahrungsmässigem Wege begründeten Naturgesetzen Bedeutung verleiht, eine weiter reichende gewinnen sie hinsichtlich des Endzieles physikalischer Forschung dadurch, dass sie einen Leitfaden darbieten, an die Erscheinungen solche Vorstellungen zu knüpfen, vermöge welcher sich der Grund der ersteren in der Natur der Körper nachweisen lässt.

Man beachte die Art und Weise, wie die verschiedenen Gasarten darin umfasst werden. In dem letzten Ausdrucke sind alle die einzelnen Gase betreffenden Bestimmungsstücke weggefallen. Der quantitative Verlauf, insofern er durch die Wärmemengen verfolgt wird, ist also gänzlich losgetrennt von der specifischen Beschaffenheit seiner Träger, das aufgestellte Gesetz gilt unabhängig von dieser, und ist nur an die Bedingung gewisser normaler Verhältnisse geknüpft, derjenigen nämlich, welche den Gaszustand

charakterisiren; es erstreckt sich auf alle Körper, wofern sich dieselben dem idealen Grenzzustande asymptotisch genähert haben, in welchem der Elasticitätsmodul eines jeden, rücksichtlich der Dichte, einen constanten Werth erreicht hat und nur den Zunahmen der Wärmemenge [35] proportional sich ändert (MARIOTTE'sches und und GAY-Lussac'sches Gesetz). Es muss also auch der Grund der Erscheinungen von der specifischen Natur der einzelnen Stoffe unabhängig sein, und kann mithin nur in demjenigen gesucht werden, was allen gemeinsam ist, d. i. in der Natur der Wärme und in den Verhältnissen des elastisch flüssigen Aggregatzustandes. - Nachdem so zunächst das Gebiet begrenzt ist, führt die Art der Abhängigkeit, wie sie das obige Gesetz feststellt, zur näheren Bestimmung. Die verschwundenen oder erzeugten Wärmemengen sind unter allen Verhältnissen der vom Gase geleisteten Arbeit proportional; beides, Veränderung der Wärmemenge und mechanische Arbeit, treten stets in demselben Verhältniss mit einander auf. Was sich aber in der Erfahrung durchgängig zusammen zeigt, halten wir uns berechtet, auch als seiner Natur nach nothwendig zusammengehörig zu betrachten und in Form von Ursache und Wirkung verknüpft zu denken. So wird, was ursprünglich nur ein mathematischer Zusammenhang war, als ein physischer Zusammenhang vorgestellt, wonach es denn heisst: die Wärme wird erzeugt oder verschwindet durch die mechanische Arbeit.

Und nun entsteht die Frage: mit welchen Vorstellungen über das Wesen der Wärme lässt diese Thatsache sich vereinigen? Die Antwort ist: die Wärme muss in mechanische Arbeit und diese in Wärme verwandelt werden können, — Wärme und mechanische Arbeit müssen äquivalent sein, — die erstere muss ihren innern Grund in der Bewegung von Massen haben und muss selbst durch Dasjenige, was in der Bewegung der Arbeit gleichwerthig, d. i. durch die lebendige Kraft, gemessen sein.

Auf solche Weise werden die betrachteten Vorgänge erklärt, indem zugleich bestimmte Voraussetzungen über die Wärme gebildet werden. Beide Schritte bedingen sich wechselseitig, so dass der eine Grund und Rechtfertigung des andern enthält. Ihr gemeinsames Resultat ist, dass das experimentell gewonnene Gesetz der Proportionalität [36] von Wärme und mechanischer Arbeit als Gesetz der Aequivalenz beider ausgesprochen wird.

Dies ist das Ziel, welches ich oben der Untersuchung gesteckt habe.

Zum Schlusse will ich noch einige Folgerungen hervorheben, zu welchen, im Sinne der eingehaltenen Betrachtungsweise, die gewonnenen Ergebnisse Veranlassung bieten.

In dem Ausdrucke für die erzeugte oder verschwundene

Wärmemenge stellt, wie auch ausdrücklich bemerkt,  $\int\limits_{v_{c}}^{v_{c}} \rho dv$ , dieje-

nige Arbeitsgrösse vor, welche während der Volumänderung des Gases in seiner Begrenzungsfläche geleistet wird, und es ist also auch nur diese äussere Arbeit, durche welche iene Wärmemengen bedingt erscheinen. Diese nähere Bestimmung hat nun, durch einen schon früher von GAY-LUSSAC, neuerdings von IOULE angestellten interessanten Gegenversuch eine unmittelbare Bestätigung erhalten; es hat sich herausgestellt, dass in der That eine Luftmasse Volumänderungen erleiden kann, ohne dass eine Aenderung der Wärmemenge zu erfolgen braucht, wenn nämlich jene so bewirkt werden, dass dabei keine äussere Arbeit geleistet wird - wie es (das Luftquantum im Ganzen genommen) der Fall ist, wenn eine Ausdehnung in einen leeren Raum hinein erfolgt. Mithin muss angenommen werden, dass bei der Compression oder Dilatation eines Gases nur die an der Oberfläche geleistete Arbeit in Wärme, sowie umgekehrt Wärme nur in äussere Arbeit umgesetzt wird; welche Bemerkung nun zu der Alternative führt: entweder es liegt in der Natur der Gase, d. h. in den Verhältnissen ihres Aggregratzustandes, dass bei der Volumänderung überhaupt keine andere als äussere Arbeit entstehen kann, oder es liegt in der Natur der Wärme, d. h. in der Art ihres Vorhandenseins in den Gasen, dass sie nur in der Begrenzungsfläche des betreffenden Mediums in mechanische Arbeit, und diese in jene, amgesetzt werden kann. Das erste würde die Folgerung nach sich ziehen, [37] dass das Potential der Gastheile auf einander oder einer Gasmasse auf sich selbst Null ist, d. h. keine unmittelbare Wechselwirkung zwischen Gaselementen besteht. Das zweite würde auf tie Annahme führen, die Bewegung, in der die Wärme ihren Grund haben soll, in den Gasen wenigstens als eine fortschreitende (eine Wurfbewegung) zu betrachten, welche nur durch Vermittelung bewegter Wände einer Vermehrung oder Verminderung und dabei einer Umwandelung in mechanische Arbeit fähig ist.

Man übersieht, wie die Fortführung dieser Betrachtung zu der

sinnreichen, von Krönig<sup>1</sup>) begündeten, von Clausius<sup>2</sup>) und Andern weiter entwickelten Theorie der Gase hinleitet, welche das ganze Verhalten dieser, so wohl hinsichtlich der mechanischen, als auch der Wärmevorgänge, aus ein und demselben Principe zu erklären unternimmt.

Endlich will ich auf eine Anwendung hinweisen, welche von den Resultaten der früheren Entwicklungen, unabhängig von ihrer theoretischen Verwerthung, für die Zwecke der experimentellen Untersuchung der Wärmeerscheinungen gemacht werden kann.

Alle fundamentalen Aufgaben der letzteren drehen sich um die Messung von Wärmemengen, und es ist daher die Feststellung einer bestimmten Maasseinheit für diese die wesentliche Grundlage aller hier einschlagenden Arbeiten. Das allgemein gebräuchliche Maass. — die Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit Wasser um 1º erwärmt ist nun offenbar ein willkürlich festoestelltes. also ein in der Physik besonders eingeführtes Grundmaass. Nun liegt allerdings von Seiten der practischen Beobachtung keinerlei etwa im Interesse sicherer Vergleich-Bedürfniss vor von diesem barkeit der Messungen - auf ein absolutes Maass zurückzugehen. wie es auf andern Gebieten [38] wohl der Fall ist; immerhin aber bleibt es interessant, die Mittel zu übersehen, durch welche das System absoluter Maassbestimmung, wie man es in allen Theilen der Physik zur Geltung zu bringen sucht, auch auf den Bereich der Wärmeerscheinungen ausgedehnt werden könnte. - Hierzu würde nichts weiter erfordert werden, als eine in absoluten Maassen bestimmbare Wirkung der Wärme und zugleich das Gesetz aufzufinden, nach welchem dieselbe ein für alle mal durch die messbaren Verhältnisse bedingt ist: es würde alsdann die absolute Einheit unmittelbar durch diejenige Wärmemenge festgestellt sein, welche unter näher anzugebenden normalen Verhältnissen die Einheit jener Wirkung hervorbringt. Dieser Forderung ist aber durch das oben begründete Gesetz der Compressionsvorgänge bei den Gasen schon vollständig Genüge geleistet. Es ist vermöge desselben in der That eine in absoluten Maassen bestimmbare Wirkung der Wärme festgestellt, nämlich in der mechanischen Arbeit, welche sie in den

<sup>1) [</sup>Grundzüge einer Theorie der Gase.] POGGENDORF's Annalen. Bd. 99. [1856. pp. 315-322.]

<sup>2) [</sup>Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen.] Ebend. Bd. 100. [1857. pp. 353 $\pm$ 380.]

Gasen hervorbringt, -- was zwar eine Wirkung, welche, unabhängig von jeder stofflichen Verschiedenheit der Körper, in ihrem Hervortreten nur an gewisse, als normal zu bezeichnende Verhältnisse, an die des Gaszustandes, geknüpft erscheint. Es liegt auf der Hand, wie dieses Ergebniss zu einer absoluten Maassbestimmung der Wärmemengen führt; die Einheit ist diejenige Wärmemenge, die unter Vermittelung irgend eines gasförmigen Körpers die Einheit der mechanischen Arbeit zu leisten vermag. Sie ist also direct auf die mechanischen Grundmaasse zurückgeführt; und zwar ist diese Zurückführung unabhängig von den theoretischen Vorstellungen, die man mit jener Arbeitsleistung verbinden mag, nur dass, was so eine Definition der Wärmemenge nur aus ihren Wirkungen, mit letzteren zugleich die Bedeutung einer solchen aus ihren Ursachen erhält.

Es ergiebt sich hiernach die Bedeutung, welche dem Buchstaben A in der Gleichung für  $Q_t$  von dieser Seite betrachtet, zukommt. Im Sinne der mechanischen [39] Wärmetheorie ist es die Wärmemenge, die der Arbeitseinheit äquivalent ist; hier stellt sie die Zahl vor, welche das absolute Maass in Einheiten des früheren Grundmaasses, und ihr reciproker Werth  $\frac{1}{A} = \frac{ak}{\lambda-1+c}$  (das sog. me-

chanische Wärmeäquivalent) die Zahl, welche umgekehrt das Grundmaass in absoluten Einheiten ausdrückt.

Hiermit nun bestimmt sich sehr einfach die Wärmemenge Q, welche in einem beliebigen Gasquantum bei beliebigen Werthen von  $\vartheta$  und  $\varrho$  enthalten ist; es ist dieselbe, in absolutem Maasse gemessen, unmittelbar gegeben durch die Grösse der in ihm aufgespeicherten mechanischen Arbeit, d. h. derjenigen Arbeit, welche dasselbe leisten würde, indem es sich ins Unendliche ausdehnt, ehne dass dabei Wärme zugeführt oder ihm entzogen wird. Es st also

$$Q = \int\limits_{r_1}^{r_2} p dv$$

wobei der Verlauf von p durch die Gleichung

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\lambda} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\lambda}$$

bestimmt zu denken ist. -- Mithin ist das Maass der in einer Gas-

masse enthaltenen Wärme der Werth derjenigen Function, deren Aenderung die geleistete äussere Arbeit giebt und die man daher, nach Analogie, das Potential der Gasmasse nennen könnte; und damit darf also die absolute Einheit der Wärmemenge als diejenige bezeichnet werden, welche einem ganz beliebigen Gasquantum die Einheit dieses Potentials ertheilt.

Die Ausführung der Integration im Obigen ergiebt

$$Q = p_1 v_1^{\lambda} \int_{v_1}^{\infty} \frac{dv}{v^{\lambda}} = \overline{\lambda - 1} \cdot p_1 v_1$$

wofür auch, unter Beziehung auf die Gewichtseinheit,  $\overline{\lambda-1} \cdot k(1-|-a\partial_1)$  gesetzt werden kann. Die Grösse  $p_t v_1$  oder  $k(1+|a\partial_1)$  ist nun nichts weiter als der Elasticitätsmodul [40] des Gases in dem betreffenden Zustande. Folglich enthalten gleiche Mengen verschiedener Gase unter solchen Verhältnissen, da ihnen derselbe Elasticitätsmodul zukommt, Wärmemengen, die den Werthen von  $\lambda-1$  proportional sind; und ferner:  $\lambda-1$  stellt die Wärmemenge (in absol. Maasse) vor, welche der Gewichtseinheit jedes Gases die Einheit des Elasticitätsmoduls ertheilt, oder diesen um die Einheit ändert), sowie  $\frac{\lambda}{\lambda-1}$  die Aenderung des letzteren, welchen die Wärmeeinheit hervorbringt.

Es zeigen diese Bemerkungen, welches Interesse eine möglichst genaue Bestimmung der Constanten  $\lambda$  für die Kenntniss der Gase haben würde, indem in ihr ein die specifische Natur der Stoffe charakterisirendes Element gegeben ist.